22 Soit la fonction $f : x \mapsto \sqrt[4]{x^2-1}$ et C_f sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1. Vérifier que f est une fonction paire.

2. a. Montrer que pour tout $x \geq 1$, $f(x) = \sqrt{x}\sqrt[4]{1-\frac{1}{x^2}}$.

b. En déduire $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$.

3. a. Etudier la dérivabilité de f à droite en 1.

b. Montrer que f est dérivable sur $]1,+\infty[$ et calculer $f'(x)$.

c. Etudier les variations de la fonction f.

4. a. On désigne par Δ la droite d'équation $y = x$. Etudier la position relative de la courbe C_f et de la droite Δ.

b. Tracer la courbe C_f.

5. a. Montrer que la fonction f réalise une bijection de $[1,+\infty[$ sur $\mathbb{R}_+$.

b. Montrer que la fonction f^{-1} est dérivable sur $\mathbb{R}_+$.

c. Tracer la courbe C' de f^{-1} dans un même repère.

23 A/ Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+$ par $f(x) = \sqrt[3]{x} - \frac{x}{3} + 3$ et C_f sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1. a. Monter que pour tout réel $x > 0$, $f(x) = x\left(\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} - \frac{1}{3}\right) + 3$.

b. Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$.

c. Etudier la nature de la branche infinie de C_f.

2. a. Etudier la dérivabilité de f à droite en 0.

b. Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et calculer $f'(x)$.

c. Etudier les variations de la fonction f.

d. Montrer que l'équation $f(x) = 0$, admet une unique solution α dans $\mathbb{R}_+^*$.

Donner une valeur approchée de α à 10^{-1} près.

e. Tracer la courbe C_f.

24 A/ Pour tout entier naturel non nul n, on considère la fonction f_n définie sur $\mathbb{R}$ par $f_n(x) = x^{2n+1} + 3x - 2$.

On note C_n la courbe de f_n dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1. a. Dresser le tableau de variation de f_n.

b. Montrer que le point $I(0,-2)$ est un centre de symétrie de C_n.

c. Déterminer le point d'inflexion de C_n.

2. a. Etudier la position relative de C_n et C_{n+1}.

b. En déduire que toutes les courbes C_n passent par trois points fixes I, A et B que l'on déterminera.

3. a. Montrer que f_n est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$.

b. Etudier la dérivabilité de f_n^{-1} sur $\mathbb{R}$ et calculer $(f_n^{-1})'(-6)$, $(f_n^{-1})'(-2)$ et $(f_n^{-1})'(2)$.

4. a. Montrer que l'équation $f_n(x) = 0$ admet une unique solution x_n et que $0 < x_n < \frac{2}{3}$.

b. Montrer que pour tout entier naturel non nul n, $x_n = \frac{2 - x_n^{2n+1}}{3}$.

c. Montrer que pour tout entier naturel non nul n, $0 \leq x_n^{2n+1} \leq \left(\frac{2}{3}\right)^{2n+1}$.

d. En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n^{2n+1}$ puis $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n$.

B/ On suppose que $n = 1$.

On désigne par f la fonction f_1 et par α le réel x_1.

1. Soit la fonction φ définie sur $[0,\frac{2}{3}]$ par $\varphi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$.

a. Montrer que $\varphi\left([0,\frac{2}{3}]\right) \subset [0,\frac{2}{3}]$.

b. Montrer que pour tout x de $[0,\frac{2}{3}]$, $\varphi(x) - \alpha = (x-\alpha)^2 \frac{(2x+\alpha)}{3(x^2+1)}$.

Qarray.tn - Aqra Blech - Qarray.tn